ÜBER DIE REGULÄREN POLYEDER IM ZUSAMMENHANG MIT DEM WÜRFEL UND DER KUGEL

Wilhelm Karl Fischer



Der Vortheil eines auf mathematische Prinzipien gestützten Modellirens der regulären Körper scheint mir nicht unbedeutend zu seyn. Kein mir bekanntes Lehrbuch giebt hiezu Anleitung. Dadurch sah ich mich veranlaßt, gegenwärtiges Programm zu schreiben.

Uebrigens stand ich während der Verabfassung desselben in dem Wahne, als sey die Anfertigung des Ikosaeders und Dodekaeders aus dem Würfel eine mir zugehörige Erfindung, und wurde erst nach Beendigung des Programms zu meiner großen Beschämung mit dem 16ten Buch Euklids bekaunt.

Mit der Anfertigung des Tetraeders und Oktaeders war ich schon seit längerer Zeit durch Herrn von Raumers in Erlangen schöne Vorträge über Krystallographie bekannt gemacht worden.

§. 1.

Durchschnitte des Würfels.

A. Kanten-Durchschnitt.

Die Kanten des Würfels lassen sich ihrer Lage nach in drei Gruppen, jede von vier parallelen Kanten eintheilen.

Zu jeder dieser Gruppen giebt es eine Schnittebene, welche durch die Mitten von vier parallelen Kanten geht. Diese Schnitte sind in Fig. 1.

$x x' x'' x'''$		ae, bf, cg, ah
$y y' y'' y'''$	durch die Mittelpunkte der Kanten:	ab, dc, hg, ef
$z z' z'' z'''$		ad, bc, eh, fg.

Ein solcher Kanten-Durchschnitt hat folgende hier bemerkbare Eigenschaften:

1) Jeder ist ein der Würfelfläche congruentes Quadrat, daher auch die drei Durchschnitte unter sich congruent sind.

2) Die Diagonalen der Kanten-Durchschnitte sind unter sich und der Diagonale der Würfelfläche gleich:

$$xx'' = x'x''' = yy'' = y'y''' = zz'' = z'z''' = db$$

überdies verbinden dieselben die Mitten paralleler Kanten, stehen senkrecht auf den Kanten, stehen auf einander selbst senkrecht, und schneiden und halbiren sich sämmtlich im Pkt. **M**, in welchem sich die drei Kanten-Durchschnitte begegnen. Sie werden sofort Kantenaxen genannt.

3) Die Schnittlinien von je zwei Kanten-Durchschnitten:

rq von $\begin{cases} xx'x''x''' \\ zz'z''z'''; \end{cases}$ sp von $\begin{cases} xx'x''x''' \\ yy'y''y'''; \end{cases}$ ot von $\begin{cases} yy'y''y''' \\ zz'z''z''' \end{cases}$

sind unter sich und der Würfelkante gleich,

$rq = sp = ot = ac$ etc.

verbinden die Mittelpunkte von zwei parallelen Würfelflächen, stehen auf diesen letztern senkrecht, bilden mit einander selbst rechte Winkel, und schneiden und halbiren sich sämmtlich im Punkt **M**. Sie werden von nun an Flächenaxen genannt.

B. Eck-Durchschnitt.

Der Würfel hat sechs Paare paralleler Kanten, die nicht in einer Würfelfläche liegen. Jedes Paar bestimmt eine Ebene, welche durch vier Ecken des Würfels geht; man erhält somit 6 Eckdurchschnitte (Fig. 2):

adfg und **bceh**, **aceg** und **dbhf**, **deef** und **abhg**.

1) Jeder Durchschnitt ist ein Rechteck, gebildet von zwei Würfelkanten, und zwei Diagonalen der Würfelflächen, daher sie alle einander congruent sind.

Fig. 19. Wenn **ABFE** die Würfelfläche darstellt, und man construirt ein Rechteck **LHNS** (Fig. 20),

dessen kleinere Seite $LN = AB$ (der Würfelkante),

dessen größere Seite $NS = AF$ (der Flächendiagonale),

so hat man einen Eckdurchschnitt des Würfels.

Aus der Congruenz der Eckdurchschnitte folgt, daß ihre Diagonalen sämmtlich unter sich gleich, d. h. $= SL = HN$.

2) In jedem Eckdurchschnitte liegen die Mittelpunkte zweier parallelen Würfelflachen, also eine Flächenaxe (in Fig. 20. **OT**), und je zwei Durchschnitte haben eine Flächenaxe gemeinschaftlich:

adfg und **bceh** schneiden sich in **sp**;
aceg und **dbhf** „ „ „ **ot**; (Fig. 2.)
deef und **abhg** „ „ „ **rq**.

3) Ferner liegt in jedem Eckdurchschnitt eine Kantenaxe (in Fig. 20 **JK**), und der Winkel, den zwei Kantenaxen mit einander bilden, ist der Neigungswinkel von einem Paar Durchschnitte, die eine Flächenaxe gemein haben:

Der Winkel **zMz'** der Kantenaxen **zz''** und **z'z'''** ist Neigungswinkel der Durchschnitte **adfg** u. **bceh**,

„ „ **xMx'** „ „ **xx''** und **x'x'''** ist Neigungswinkel der Durchschnitte **aceg** und **dbhf**,

Der Winkel yMy′ der Kantenaxen yy″ und y′y‴ ist Neigungswinkel der Durchschnitte
abhg und deef,

alle diese Winkel aber sind rechte.

4) In dem Punkt M, gleich wie die Kanten- und Flächenaxen, schneiden und halbiren sich auch die Diagonalen der Eckdurchschnitte, welche als Verbindungslinien von 2 Würfelecken Eckaxen genannt werden.

Die Eckaxen sind ebenfalls Durchschnittslinien von 2 Eckdurchschnitten:
aceg und adfg schneiden sich in ag, adfg und dbfh schneiden sich in df,
dbfh und bche „ „ „ bh, bche und aceg „ „ „ ce.

C. Ueber den Punkt M und die verschiedenen Kugeln, welche durch denselben bestimmt werden.

Es ist nun leicht einzusehen, daß der Punkt M
erstlich von allen Würfelflächen, zweitens von allen Kanten, drittens von allen Würfelecken gleichweit entfernt ist. Es kann daher

M 1) Mittelpunkt einer Kugel seyn, von der die Würfelflächen Berührungsebenen und deren Durchmesser die Flächenaxen sind. Man nennt sie einbeschriebene Kugel.

M kann 2) Mittelpunkt einer Kugel, deren Durchmesser die Kanten sind, und welche von den Kanten berührt wird. Die der Würfelfläche einbeschriebenen Kreise liegen auf der Oberfläche dieser Kugel.

M kann 3) Mittelpunkt einer Kugel seyn, deren Halbmesser die Eckaxen sind, und in deren Oberflächen die Ecken der Kugel liegen. Man nennt sie umbeschriebene Kugel. Die der Würfelfläche umschriebenen Kreise liegen auf der Oberfläche dieser Kugel.

Wenn man daher auf die obenbeschriebene Weise den Eckdurchschnitt eines Würfels construirt (Fig. 20), so ist **OT = LN** = der Würfelkante, der Durchmesser der einbeschriebenen Kugel. **JK = LH** = der Diagonale der Würfelfläche, der Durchmesser der die Kanten berührenden Kugel. **LF** die Diagonale des Durchschnitts, der Durchmesser der umbeschriebenen Kugel.

§. 2.

Die Lösung der Aufgaben, dem Würfel ein Tetraeder einzubeschreiben und ein Tetraeder aus dem Würfel zu schneiden.

Aufl. I. Man verzeichne auf einer Würfelfläche z. B. abcd eine Diagonale bd; (Fig. 3) auf der zur ersten parallelen Würfelfläche eg fh ziehe man diejenige Diagonale eg, deren Richtung auf der Richtung der ersten senkrecht ist; endlich verbinde man die Endpunkte dieser Diagonalen durch de. be, dg, bg, und legt durch sie Ebenen, so ist dbeg das verlangte Tetraeder.

Bew. Die Grenzflächen dieses Körpers: dbg, beg, bgd, dge sind sämmtlich gleichseitige

Dreiecke, da sie von Diagonalen der Würfelflächen begrenzt sind. Die Körperwinkel sind congruent, weil sie von 3 gleichen ebenen Winkeln à 60° gebildet werden.

Aufl. **II.** Man ziehe wie vorhin Diagonalen db und eg auf zwei parallelen Würfelflächen und führe durch die Diagonale db und das Eck e einen Schnitt, so daß die Pyramide adbe wegfällt und das gleichseitige Dreieck dbe (Fig. 4) übrig bleibt Deßgleichen führe man durch db und g einen Schnitt, daß cdbg wegfällt und das gleichseitige Dreieck dbg übrig bleibt.

Die beiden noch vollständigen Würfelecken

f schneidet man weg durch einen Schnitt von eg nach b,
h " " " " " " " eg nach d.

Man erhält dann das Tetraeder (Fig. 5), das man sich auf einer Kante stehend zu denken hat.

§. 3.

Grenzfläche und Durchschnitte des (dem Würfel einbeschriebenen) Tetraeders.

A. Grenzfläche.

Construirt man ein gleichseitiges Dreieck **BEG** (Fig. 21), dessen Seite gleich der Diagonale der Würfelfläche ist, so hat man die Grenzfläche des Tetraeders, welches dem Würfel einbeschrieben wurde. Das Loth **BK** ist das Apothem des Tetraeders.

B. Kantendurchschnitt.

Von dem im Würfel einbeschriebenen Tetraeder fallen die Mitten der Kanten mit den Mittelpunkten der Würfelflächen zusammen.

Die Flächenaxen rq, sp, ot des Würfels (Fig. 1 und 7) verbinden also die Mitten der Tedraederkanten. Der Mittelpunkt **M** des Würfels bleibt Durchschnitts- und Halbirungspunkt und ist von den Kanten des Tetraeders gleichweit entfernt. Die Flächenaxen des Würfels sind Kantenaxen des einbeschriebenen Tetraeders.

Mit den Kantendurchschnitten des Würfels liegen drei Kantendurchschnitte des einbeschriebenen Tetraeders rsqp, ostp, ortp in einerlei Ebene (Fig. 7). Sie sind unter sich congruent, und jeder einzelne ist ein Quadrat, welches sich leicht durch Construction bestimmen läßt:

Man verzeichnet einen Kantendurchschnitt des Würfels (resp. eine Würfelfläche) **ABEF** (Fig. 19), und verbindet die Mittelpunkte der Seiten, so ist das Quadrat **ILKN** der Kantendurchschnitt; Kantenaxen des einbeschriebenen Tetraeders sind, **JN**, **LK**.

C. Eckdurchschnitte des Tetraeders.

Mit jedem Eckdurchschnitte des Würfels liegt ein Schnitt des Tetraeders in ein und derselben Ebene; sie sind alle unter sich congruent, und jeder ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie eine Tetraederkante, dessen Schenkel Apotheme sind. Die Spitze trifft in die Mitte der gegenüberliegenden Kante und die Kantenaxen des Tetraeders sind Höhenlinien der Dreiecke. Diese

Durchschnitte, die ich Eckdurchschnitte des Tetraeders nennen will, sind an der Zahl 6, **dtb** und **eog**; **brg** und **dqe**; **epb** und **dsg**; von denen Fig. 5 **dtb** verzeichnet ist.

Die Construction ist folgende:

(Fig. 20). Im Eckdurchschnitt des umschriebenen Würfels **LHSN** verbindet man die Endpunkte einer größern Seite **LH** mit der Mitte **T** der gegenüberliegenden, so ist **LTH** der verlangte Schnitt.

Hier ist **LH** Kante des Tetraeders, **OT** Kantenaxe, **LT** = **HT** Apotheme, Winkel **LTH** Neigungswinkel von zwei Tetraederflächen.

Ferner läßt sich, vermittelst des pythagoräischen Lehrsatzes wie der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke, leicht beweisen, daß die Diagonalen

LS **HN**	die Apotheme	**HT** **LT**	in den Punkten	**W** **V**

senkrecht treffen und im Verhältniß von 1:2 theilen, so daß also **TW** = $\frac{1}{3}$ **TH** und ebenso **TV** = $\frac{1}{3}$ **TL**, d. h. die Punkte **V** und **W** entsprechen den Mittelpunkten der Tetraederflächen.

D. Ueber den Punkt **M** und die durch das Tetraeder bestimmten Kugeln.

Die Eckdurchschnitte des Tetraeders treffen sich ebenfalls sämmtlich im Punkt **M**, dem Mittelpunkt des Würfels.

(Fig. 20.) Der Punkt **M** ist von allen Ecken des Tetraeders gleichweit, nämlich um die halbe Diagonale **LM** entfernt, daher **M** der Mittelpunkt einer Kugel seyn kann, deren Halbmesser **LM** ist, und in deren Oberfläche sämmtliche Ecken des Tetraeders und die den Tetraederflächen umschriebenen Kreise liegen.

Der Punkt **M** ist von allen Tetraederkanten gleichweit, nämlich um die halbe Kantenaxe **OM** entfernt, daher derselbe der Mittelpunkt einer Kugel seyn kann, deren Halbmesser = **OM** ist, und von der die Tetraederkanten Tangenten sind. Die der Tetraederfläche einbeschriebenen Kreise liegen in der Oberfläche der Kugel.

Der Punkt **M** ist endlich von allen Tetraederflächen gleichweit entfernt, nämlich um die Gerade **MW** oder **MV**, kann also Mittelpunkt einer Kugel seyn, deren Halbmesser = **MW** ist, und von der sämmtliche Tetraederflächen Berührungsebenen sind. — Man nennt sie einbeschriebene Kugel. Die Mittelpunkte der Flächen liegen in der Oberfläche dieser Kugel.

Noch ist bemerkenswerth:

WH ist der Halbmesser des der Tetraederfläche umschriebenen Kreises, **WT** der Halbmesser des der Tetraederfläche einbeschriebenen Kreises.

§. 4.

Lösung der Aufgaben, dem Würfel ein Octaeder einzubeschreiben, und aus dem Würfel ein Octaeder zu schneiden.

Aufl. I. Man verbinde die Mittelpunkte von je zwei nebeneinanderliegenden Würfelflächen durch die Geraden:

ro, oq, qt, tr; os, st, tp, po; rs, sq, qp, pr (Fig. 6)

denke durch diese Geraden Ebenen gelegt, so wird dadurch das Octaeder ors qpt bestimmt.

Bew. Die Grenzflächen ors, osq, rst, stq; orp, opq, rpt, ptq sind sämmtlich gleichseitige Dreiecke, deren Seitenlinie = JL (Fig. 19), der Hypotenuse eines gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten gleich den halben Würfelkanten sind.

Die körperlichen Ecken sind congruent, weil sie von 4 gleichen ebenen Winkeln jedem zu 60° gebildet werden.

Aufl. II. Man schneidet sämmtliche 8 Ecken des Würfels in derselben Weise ab, wie man vier abschneidet, um ein Tetraeder zu bilden, oder:

man schneidet aus dem Würfel ein Tetraeder dbeg; hernach führt man durch die Mitten von je drei Kanten, die in einem Eck zusammenlaufen, einen Schnitt, so daß die vier Ecken des Tetraeders wegfallen (Fig. 7):

das Eck e oder die Pyramide erst durch den Schnitt rst,
" " g " " " gqtp " " " pqt,
" " b " " " bosq " " " osq,
" " d " " " dorp " " " orp.

Die vier Schnittflächen, die man auf diese Weise erhält, nebst den vier Flächen ors, stq, oqp, rpt, welche von den Tetraederflächen übrig bleiben, bilden das verlangte Octaeder.

§. 5.

Grenzfläche und Durchschnitte des Octaeders.

A. Grenzfläche des Octaeders.

Die Grenzfläche des dem Würfel einbeschriebenen Octaeders läßt sich auf doppelte Weise construiren. Entweder sucht man JL (die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Schenkel gleich der halben Würfelkante sind (Fig. 19) und beschreibt mit derselben als Seite ein gleichseitiges Dreieck, oder man construirt die Grenzfläche BEG (Fig. 21) des dem Würfel einbeschriebenen Tetraeders und verbindet die Mitten der Seiten, so ist FHK die verlangte Octaederfläche.

Anm. Man sieht leicht ein, daß die Dreiecke FBH ≅ EFK ≅ HKG ≅ FHK sind. Daraus folgt, daß die nach dem vorigen §. vom Tetraeder weggeschnittenen Pyramiden selbst wieder Tetraeder sind, die die Octaederfläche zur Grenzfläche haben.

B. Durchschnitt I., oder der dem Kantendurchschnitt des Würfels entsprechende Eckdurchschnitt des Octaeders.

Es giebt 3 Durchschnitte des Octaeders, die zugleich durch vier Ecken desselben gehen, und mit den Kantendurchschnitten des Würfels in einerlei Ebene liegen:

rsqp in der Ebene von $xx'x''x'''$,
ostp „ „ „ „ $yy'y''y'''$,
oqtr „ „ „ „ $zz'z''z'''$.

Die drei Durchschnitte sind einander congruent, nämlich: jeder ein Quadrat, dessen Seite die Octaederkante ist. Man findet einen solchen Durchschnitt durch Construction, indem man in der Fläche des umbeschriebenen Würfels **ABEF** die Mitten der Seiten verbindet und so das Quadrat **JLNK** (Fig. 19) verzeichnet.

In jedem solchen Durchschnitt liegen zwei Eckaxen des Octaeders,

in rsqp liegen rq und sp, in ostp liegen sp und ot, in ortq liegen ot und rq.

Jede Eckaxe ist daher zwei Durchschnitten gemeinschaftlich und an sich nichts anderes als die Flächenaxe des umschriebenen Würfels, daher sich alle drei im Punkt **M**, dem Mittelpunkt des Würfels, schneiden und halbiren.

Es liegen in einem solchen Durchschnitte auch zwei Kantenaxen des Octaeders, welche mit den Kantenaxen des Würfels zusammenfallen z. B. in orqt die Axen ad und cb, den Octaederkanten parallel und gleich sind und sich ebenfalls im Punkt **M** schneiden und halbiren. In Fig. 19 sind **RO** und **ST** solche Kantenaxen.

C. Durchschnitt II., d. h. der dem Eckdurchschnitt des Würfels entsprechende Octaederschnitt.

(Fig. 6.) Jeder Eckdurchschnitt des Würfels geht durch zwei Ecken und die Mitten zweier Kanten vom Octaeder. Die Durchschnitte sind congruent und jeder ist eine Raute, deren Seiten = dem Apothem des Octaeders, deren größere Diagonale = Eckaxe, deren kleinere Diagonale = Kantenaxe des Octaeders ist.

Z. B. in omtn sind die Seiten: om = mt = tn = no, größere Diagonale = ot, kleinere Diagonale = mn.

Da die Seitenlinien dieses Durchschnitts zugleich Höhenlinien der Octaederflächen sind, so geht derselbe auch durch die Mitten von je 4 Flächen; es liegen also 2 Flächenaxen des Octaeders lk und hu in demselben, welche sich ebenfalls im Punkt **M**, dem Mittelpunkt des Würfels schneiden und halbiren.

Construction. (Fig. 20.) Verzeichnet man den Eckschnitt des Würfels **LHSN** und verbindet die Mitten **O** und **T** der größern Seiten mit den Ecken durch die Geraden **ON**, **OS** und **TL**, **TH**, wo jede für sich betrachtet ein Apothem des einbeschriebenen Tetraeders wäre, so ist leicht zu erkennen:

Beim Wegschneiden sämmtlicher Ecken des Würfels in der obenbeschriebenen Weise bleibt von **LHSN** nichts übrig als die Raute **OPTQ**. Hier sind **O** und **T** Octaederecken, **OT** deren Axe, **P** und **Q** Mittelpunkte von Octaederkanten, **PQ** Kantenaxe des Körpers und zugleich Länge der Kante selbst.

OP = PT = TQ = QO sind Höhenlinien der Octaederflächen.

Endlich ist vermittelst des pythagoräischen Lehrsatzes und der Aehnlichkeitslehre ebner Dreiecke leicht nachzuweisen:

Wenn die Diagonalen **LS** und **HN** gezogen werden, so schneidet **LS** die Geraden **QN** und **TH** in **R** und **W**, **HN** die Geraden **TL** und **OS** in **V** und **U** senkrecht.

Zugleich sind **PR = PV = QU = QM** = $\frac{1}{3}$ **PO**, d. h. der dritte Theil von der Höhenlinie der Octaederfläche, daher **R**, **V**, **W**, **U** Mittelpunkte der Flächen.

D. Von den durch das Octaeder bestimmten Kugeln.

Im Punkt **M** schneiden und halbiren sich alle Axen des Octaeders; derselbe kann also Mittelpunkt von drei verschiedenen Kugeln seyn:

1) von einer Kugel, deren Halbmesser = **MO** ist. In der Oberfläche dieser Kugel liegen sämmtliche Ecken des Octaeders und die um die Octaederflächen beschriebenen Kreise. Der Halbmesser der erwähnten Kreise ist = **OR**;
2) von einer Kugel, deren Halbmesser = **MP** ist. Die Oberfläche dieser Kugel wird von sämmtlichen Kanten des Körpers berührt, auch liegen in derselben die den Tetraederflächen einbeschriebenen Kreise, deren Halbmesser = **PR** ist;
3) **M** kann Mittelpunkt einer Kugel seyn, deren Halbmesser = **MR** ist. Die Oberfläche dieser Kugel berührt sämmtliche Grenzflächen des Körpers in den Mittelpunkten.

§. 6.

Aufgabe. Dem Würfel ein Ikosaeder einzubeschreiben, oder aus dem Würfel ein Ikosaeder durch Schnitt anzufertigen.

Aufl. I. Man sucht aus der Kante des Würfels durch Theilung nach dem äußern und mittlern Verhältniß die Kante des einbeschriebenen Ikosaeders, indem man nämlich Fig. 24 am Ende der Kante **AB** eine Senkrechte **BC** = $\frac{1}{2}$ **AB** errichtet, die Hypotenuse **AC** zieht und davon wieder **EC** = $\frac{1}{2}$ **AB** abschneidet, den Rest **AE** auf **AB** abträgt, dann ist **AG** die gesuchte Ikosaederkante.

NB. Für die graphische Darstellung wurde auch die scheinbar kleinere Kante nach dem äußern und mittlern Verhältniß getheilt.

Nun zeigt man auf der Oberfläche des Würfels seine 3 Kantendurchschnitte an, nämlich $xx'x''x'''$, $yy'y''y'''$, $zz'z''z'''$; man wählt ferner ganz beliebig einen dieser Kantendurchschnitte, z. B. $yy'y''y'''$ (Fig. 9) und trägt auf 2 parallelen Seiten desselben yy' und $y''y'''$ die Kante des Ikosae-

ders cc′ und ff′ = AG so auf, daß der Mittelpunkt (F) derselben mit den Mittelpunkten m und m′ der Würfelfläche zusammenfallen.

Man bemerkt, daß ein zweiter Kantendurchschnitt (hier zz′z″z‴) durch die Mitten m und m′ der bereits aufgetragenen Ikosaederkanten cc′ und ff′ geht.

Auf denjenigen Seiten dieses Durchschnitts, die nicht durch m und m′ gehen, also auf z′z″ und zz‴, trägt man wiederum die Ikosaederkanten ee′ und gg′ = AG so ab, daß ihre Mittelpunkte mit den Flächenmitten n und n′ zusammenfallen.

Durch die Mitten dieser Ikosaederkanten geht wieder ein dritter Kantendurchschnitt xx′x″x‴ des Würfels. Auf denjenigen Seiten, die nicht durch n und n′ gehen, also auf xx′ und x″x‴, trage man die Ikosaederkanten dd′ und hh′ in der obenbeschriebenen Weise auf.

Nachdem 6 Ikosaederkanten auf den Würfelflächen aufgetragen worden, verbinde man die zunächst gelegenen Endpunkte dieser Kanten, so erhält man das dem Würfel einbeschriebene Ikosaeder (Fig. 10).

Bew. Verbindet man den Endpunkt einer aufgetragenen Kante c mit den Endpunkten einer zunächst gelegenen dd′, so erhält man ein gleichseitiges Dreieck. Es ist nämlich:

$$dd' = AE \text{ oder } = AG \text{ (Fig. 24.)}$$

$$AG = AE = AC - CB = -\tfrac{1}{2} AB + \sqrt{\left(AB^2 + \left(\tfrac{AB}{2}\right)^2\right)}$$

$$AG^2 = AE^2 = \tfrac{3}{2} AB^2 - \tfrac{1}{2} AB \sqrt{\left(AB^2 + \left(\tfrac{AB}{2}\right)^2\right)}$$

$$GB = AB - AG \text{ und somit } GB^2 = AB^2 + AG^2 - AB.\,AG$$

Nun ist: $d'c^2 = cl^2 + d'l^2$

aber $cl^2 = ly^2 + yc^2 = \left(\tfrac{AB}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{GB}{2}\right)^2$

$$d'l^2 = \left(\tfrac{AG}{2}\right)^2$$

daher $d'c^2 = \tfrac{1}{4}.\,(AB^2 + GB^2 + AG^2)$

$$d'c^2 = \tfrac{1}{2}.\,(AB^2 + AG^2 - AG.\,AB) = \tfrac{3}{2} AB^2 - \tfrac{1}{2} AB.\sqrt{\left(AB^2 + \left(\tfrac{AB}{2}\right)^2\right)}$$

somit $d'c^2 = AG^2$ und $d'c = AG$, d. i. gleich jeder aufgetragenen Ikosaederkante.

Es entstehen auf diese Weise 12 gleichseitige Dreiecke, wo jedes von einer auf einer Würfelfläche aufgetragenen Ikosaederkante, und zwei Verbindungslinien mit dem Endpunkt der nächstliegenden (aufgetragenen) Kante gebildet wird. Acht werden blos von drei solchen Verbindungslinien eingeschlossen, sind aber den vorhergehenden congruent.

Der Körper ist also von 20 congruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt, jedes seiner Ecken wird von fünf gleichen ebenen Winkeln à 60° gebildet.

Auflösung II. von der Aufgabe aus dem Würfel ein Ikosaeder durch Schnitt anzufertigen.

Man trage zuerst gerade so wie in Aufl. I. sechs Ikosaederkanten auf den Würfelflächen auf, (Fig. 22) stelle eine Würfelfläche dar und cc′ die aufgetragene Ikosaederkante; yy′ und zz′ sind Seitenlinien der Kantendurchschnitte.

Hernach ziehe man auf jeder Würfelfläche durch die Endpunkte c und c′ der aufgetragenen Ikosaederkanten Parallellinien, wie vv″ und v′v‴ bezüglich zu den Seitenlinien AB und CD.

Ist das geschehen, so bemerkt man: auf jeder Würfelfläche werden erstlich die Mittelpunkte zwei paralleler Seiten von den Endpunkten verlängerter Ikosaederkanten der angrenzenden Würfelflächen getroffen; z. B. in Fig. 22 z und z′, ferner zeigen sich 4 Endpunkte der auf den angrenzenden Würfelflächen nach obenerwähnter Weise gezogenen Parallellinien wie w, w′, w″, w‴;

nun ziehe man auf jeder Würfelfläche die den Linien zw, zw′ und z′w″, z′w‴ entsprechenden Geraden, die ich später vorzugsweise Verbindungslinien nennen werde. Man schneide hierauf sämmtliche 12 Kanten des Würfels weg nach Rechtecken, die wie in Fig. 11 bestimmt sind:

von einer Ikosaederkante, z. B. cc′ und dem Ende der nächsten Kante, z. B. e

also begrenzt von

der verlängerten Ikosaederkante yy′,

der Parallelen rr′,

den Verbindungslinien yr, y′r′.

Den ersten Schnitt machen die erwähnten vier Grenzlinien sehr leicht; jeder folgende ist übrigens durch die verlängerte Ikosaederkante, die Parallele und noch eine Verbindungslinie (der Art wie zw oder yr) vollkommen sicher.

(Fig. 13.) Der auf diese Weise entstehende Körper ist nach der Anzahl der Würfelkanten von 12 Flächen begrenzt, die unter sich kongruent und Fünfecke mit 4 kleinern Seiten und einer größern (der Ikosaederkante) sind. Ich nenne diesen Körper Uebergangsdodekaeder.

Man kann sich natürlich das Geschäft des Schneidens dadurch erleichtern, daß man auf den ersten Kantenabschnitt und so auf jeden folgenden die Grenzfläche des Uebergangsdodekaeders in der richtigen Lage aufzeichnet.

Zu dem Ende betrachte man in Fig. 11 und Fig. 12 die Schnittebene yy′ rr′ genau und vergleiche zu gleicher Zeit Fig. 25, wo dieselbe Ebene in ihrer wahren Gestalt verzeichnet ist und die entsprechenden Punkte mit den gleichen großen Buchstaben angegeben sind.

Das Rechteck yy′ rr′ erscheint offenbar nachdem die Würfelkante a′a″ in der bezeichneten Weise weggeschnitten worden. Nun liegt in diesem Rechteck

1) die Ikosaederkante cc′ auf yy′,

2) die Punkte q und n, wo die Parallele rr′ von den Verbindungslinien x′v′ und x″v‴ getroffen wird,

3) die Punkte u und t, wo die Verbindungslinien yr und y′r′ von den Parallelen w″s′ und w′ s″ geschnitten werden.

Zieht man CQ und C′N (d. h. cq und c′n), ferner UE und TE (d. i. ue und te) so ist Fünfeck EKCC′K′ eine Grenzfläche des Uebergangsdodekaeders, K und K′ (in Fig. 12 k und k′) sind Ecken, die von den drei kleineren Kanten gebildet werden.

Will man nun die Kante aa′, von der noch das Stück ay übrig ist, vollends abschneiden, so hat man die vollkommen begrenzte Schnittfläche veqx′x, oder will man die Kante a′b′, von der noch Stück rb′ übrig ist, vollends wegschneiden, so hat man die vollkommen begrenzte Schnittfläche ues′z″.

In jeder neuen Schnittfläche hat man schon das Dodekaedereck k und hat also nur das entsprechende in der schon beschriebenen Weise zu suchen. —

Man bemerkt am Uebergangsdodekaeder 12 Ecken, welche an den Endpunkten der aufgetragenen Ikosaederkanten liegen, und 8 Ecken, welche den Würfelecken entsprechen und jedes Mal von drei kleineren unter sich gleichen Dodekaederkanten gebildet werden.

Schneidet man diese letzten acht Ecken weg, sämmtlich in der Weise, wie Fig. 13 das Eck k nach den Verbindungslinien cd′, d′e und ecab, so fallen acht der Pyramide kcd′e kongruente Pyramiden weg, und man erhält das gewünschte Ikosaeder.

§. 7.

Haupt-Durchschnitt des Ikosaeders. Kugeln, die durch das Ikosaeder bestimmt sind.

In jedem Kantendurchschnitt des Würfels liegen vermöge der Construction auf 2 parallelen Seiten zwei vollständige Ikosaederkanten, auf den andern beiden Seiten aber die Mittelpunkte zweier Kanten. Ist Fig. 23 zz′z″z‴ der Kantendurchschnitt eines Würfels, so sind ee′ und gg′ die darin liegenden Ikosaederkanten, m, m′ die Mitten von 2 Ikosaederkanten, zieht man daher noch me und mg, m′e′ und m′g′, so ist das Sechseck m ee′m′g′g derjenige Durchschnitt des Ikosaeders, welcher dem Kantendurchschnitt des Würfels entspricht, und der zugleich sämmtliche für das Ikosaeder wichtige Linien in sich enthält.

Es sind nämlich
ee′ oder gg′ Kanten,

mg ꝛc. Höhenlinien der Grenzflächen (Apotheme), denn sie verbinden die Spitze g des gleichseitigen Dreiecks cc′g (Fig. 10) mit dem Mittelpunkt m der Grundlinie cc′,

eg′ und e′g sind Eckaxen, denn sie verbinden zwei Ecken, indem sie sich zugleich im Mittelpunkt M schneiden und halbiren,

mm′ und ebenso nn′ sind Kantenaxen, denn sie stehen senkrecht auf den Mittelpunkten der Kanten und schneiden und halbiren sich im Punkt M.

Zieht man endlich noch durch den Punkt M die auf den Apothemen senkrechten Geraden ii‴ und i′i″, so hat man Flächenaxen des Körpers.

Der Mittelpunkt M, in dem sich wieder sämmtliche Axen des Ikosaeders schneiden und halbiren, kann Mittelpunkt von drei Kugeln seyn.

Die erste geht durch sämmtliche Ecken des Ikosaeders und hat Mc zum Halbmesser. Auf ihrer Oberfläche liegen Kreise, welche den Grenzflächen des Körpers mit dem Halbmesser = ei′ umschrieben sind.

Die zweite Kugel berührt sämmtliche Kanten des Ikosaeders in ihren Mittelpunkten und hat mM zum Halbmesser. Auf ihrer Oberfläche liegen sämmtliche den Ikosaederflächen mit dem Halbmesser = mi einbeschriebenen Kreise.

Die dritte Kugel berührt die Grenzflächen des Ikosaeders und zwar in den Mittelpunkten i, i′ ꝛc. und hat zum Halbmesser Mi.

§. 8.

Aufgabe I. Aus dem Würfel ein reguläres Dodekaeder durch Schnitt zu fertigen.

Nachdem man (Fig. 24) die Würfelkante AB im Punkte G nach dem äußern und mittlern Verhältniß getheilt hat, trägt man das kleinere Stück GB ganz so auf die Würfelflächen ab, wie es §. 6 von der Ikosaederkante gezeigt wurde.

Man erhält so (Fig. 14) die aufgetragenen Dodekaederkanten:

cc′ und ff′; dd′ und hh′; ee′ und gg′.

Werden nun alle 12 Kanten so abgestumpft, daß allemal eine Schnittebene bestimmt ist durch eine Dodekaederkante und den Endpunkt der nächsten aufgetragenen Kante, so entsteht das reguläre Dodekaeder.

Die Schnitte sind folgende:

von cc′ nach e und g; von ff′ nach e′ und g′;
von dd′ nach c und f; von hh′ nach c′ und f′;
von ee′ nach d′ und h′; von gg′ nach d und h.

Die Grenzlinien einer jeden solchen Schnittfläche lassen sich vorher auf dem Würfel selbst ziehen: man verlängert die aufgetragene Dodekaederkante, durch welche der Schnitt geführt wird, nach beiden Seiten, bis sie die Würfelkanten trifft, so z. B.

cc′ bis yy′, dd′ bis xx′, ee′ bis z′z″ u. s. f. (Fig. 14),

hernach zieht man durch den Punkt, durch welchen der Schnitt noch gehen soll, eine Parallele zur Würfelkante, z. B.

durch e die Gerade uu′ parallel a′a″,
durch c „ „ ww′ parallel aa′,
durch d „ „ ss′ parallel a′b′, u. s. f.

Weiter verbindet man die Endpunkte der verlängerten Dodekaederkanten mit den Endpunkten der ebengezogenen Parallelen, so erhält man die Begrenzung der zu führenden Schnitte, z. B.

durch cc′ und e geht der Schnitt yy′u′u,
durch dd′ und c „ „ „ xx′ww′
durch ee′ und d′ „ „ „ z″z′s′s, u. s. f.

(Die Linien der Art wie yu oder yu′ nenne ich wieder vorzugsweise Verbindungslinien.)

In der ebenbeschriebenen Weise zeigt man vor dem Schneiden die Grenzen aller 12 Abschnittflächen auf der Würfeloberfläche an. Jede Würfelfläche für sich betrachtet, wird dann die Fig. 26 darstellen.

7. 2. 20 /ℓ

Schneidet man nun eine Kante etwa a′a″ wirklich weg, so erhält man den in Fig. 15 bezeichneten Körper.

Obwohl von den Grenzlinien der Abschnittsflächen der anstoßenden Würfelkanten bei dem Schnitte Stücke wegfielen, so lassen sich doch die Abschnitte neuerdings völlig bestimmen.

Verbindet man nämlich auf der Ebene yy′u′u den Punkt n′ (von dem von x′w′ übriggebliebenen Stücke xn′) mit c, so erhält man:

cn′ die Durchschnittslinie der beiden Ebenen cc′e und dd′c und an xx′n′cw die nunmehrige Begrenzung für den Abschnitt der Würfelkante aa′.

Verbindet man ferner den Punkt l in der verkürzten Parallelen ss′ mit e, so erhält man:

le die Durchschnittslinie der beiden Ebenen cc′e und ee′d′ und an lez″s′ die nunmehrige Begrenzung für den Abschnitt der Würfelkante a′b′.

Schneidet man den noch übrigen Theil der Kante aa′ nach der eben gegebenen Bestimmung weg, so erhält man den in Fig. 16 dargestellten Körper.

Zieht man auf der neuerzeugten Fläche die Verbindungslinie d′k, so hat man die Durchschnittslinie der beiden Ebenen dd′c und ee′d′, welche in Fig. 15 als unsichtbar angedeutet ist.

Auf derselben Fläche läßt sich aber auch dq ganz in derselben Weise ziehen, wie cn′ auf der ersten; und cn″ in der Weise, wie le, welche Linien nicht allein zu den Begrenzungen weiterer

Schnitte gehören, sondern zugleich ein regelmäßiges Fünfeck ck'dd'k d. i. eine wirkliche Dodekaederfläche einschließen.

Durch k e z' s' d' ist jetzt der Abschnitt einer dritten Kante a'b' des Würfels bestimmt. Wird der Schnitt wirklich geführt, so erhält man einen Körper, dessen Darstellung Fig. 17 ist. Jetzt erscheinen die Stücke, ck, ek, d'k, welche von den Durchschnittslinien der ersten drei Abschnitte übrig blieben, als Kanten eines wirklichen Dodekaederecks. — Es ist klar, daß man wie auf Ebene dd'c die Dodekaederfläche ck dd' k', so auch auf Ebene ee'e die Dodekaederfläche ee' k" ek und auf Ebene ee' d' die Dodekaederfläche kee' pd' verzeichnen kann, und daß man nun beliebig eines der drei Ecken k', k", p auf demselben Wege wie k und somit nach und nach alle Ecken des Dodekaeders frei darstellen kann.

Beweis. Die vollständigen Abschnittsflächen sind einzeln betrachtet alle einander congruent, nämlich Rechtecke wie Y Y' U' U (Fig. 28), deren größere Seite $YY' = UU'$ = der Würfelkante, deren kleinere Seite $YU = Y'u'$ = der Verbindungslinie zt (Fig. 26).

Auf der einen größern Seite liegt immer eine aufgetragene Dodekaederkante wie CC', der Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite E ist Endpunkt einer aufgetragenen Dodekaederkante.

In den Punkten L L" werden die Verbindungslinien von den zu den Würfelkanten parallelen Grenzlinien der nächsten Abschnittsflächen getroffen, so daß also $UL = U'L'$ Fig. 28, beide $= qr$ in Fig. 26 sind.

In den Punkten N und T aber wird eine der parallelen Hilfslinien von den Verbindungslinien getroffen, so daß also $UN = U'T$ in Fig. 29 $= qw$ Fig. 26 ist.

Daher sind jedenfalls die $EL = EL'$ und $CN = CT$.

Diese Linien sind aber zugleich Durchschnittslinien von dem vorliegenden und dem nächstangrenzenden Kantenabschnitt, und CN hat im andern Kantenabschnitt gerade die Eigenschaften wie hier LE und LE hat im dritten Kantenabschnitt dieselben Eigenschaften wie hier CN, daher $LE = CN$ und ebenso $L'E = C'T$.

Aus demselben Grunde ist auch $CK = KE = K''C' = K''E$, ferner $LK = KN = L'K'$ $= K''T$

Da diese Stücke alle einander gleich, so läßt sich leicht nachweisen:

$$KN : CK = NL : CE = UN : CM.$$

also vergleicht man Fig. 26

$$KN : CK = wq : wz = ar : az = aw : az = wz : aw.$$

Ferner ist: $CK + KN = \sqrt{(LU^2 + UE^2)} = \sqrt{(rq^2 + az^2)} = \sqrt{\frac{1}{az^2} \cdot (aw^2\, rz^2 + az^4)}$.

Nun ist aber vermöge der Theilung nach dem äußern und mittlern Verhältniß

$$aw^2 = (az - wz)^2 = az. \, wz, \text{ und daher}$$

$$CK + KN = \sqrt{(wz^2 + aw^2 + az^2)} = \sqrt{4. \, az. \, wz} = 2. \, (az - wz).$$

Eliminirt aus Gleichung **I** und **II** die Größe **KN** so ergiebt sich

$$(aw + wz).\ CK = 2aw\ (az - wz) = 2az.\ wz$$

$$CK = 2wz$$

somit die $CK = KE = EK' = K'C' = C'C$

das heißt, das Fünfeck ein gleichseitiges.

$$\text{Ferner } NE = az - qw = az - \left(\frac{wz.\ aw}{az}\right) - \frac{3az.\ wz - az.\ wz}{az}$$

$$= 2wz = KE$$

daher Dreieck **NKE** gleichschenklig und

Winkel **NKE** = Winkel **KCY**,

Winkel **CKE** = Winkel **KCC'**,

Winkel **EK'C'** = Winkel **CC'K'**

also das Fünfeck gleichwinklig und regulär.

Der Körper wird von regelmäßigen Fünfecken begrenzt, deren Anzahl nach der Zahl der Würfelkanten 12 ist, und jedes seiner Ecken wird von drei gleichen Winkeln à 108° gebildet.

Auflösung II. Um dem Würfel ein Dodekaeder einzubeschreiben, hat man, wie bei der vorigen Auflösung, erst sämmtliche Abschnittsflächen auf der Oberfläche des Würfels anzuzeigen, und hernach die Durchschnittslinien von je drei an einem Würfeleck liegenden Abschnitten zu bestimmen, ebenso wie in Fig. 14 bei dem Würfeleck a' die Kantenabschnitte

cc'e		cn	
dd'c	mit ihren Schnittlinien	le	verzeichnet sind.
ee'd'		d'k	

Man erhält auf diese Weise, wenn man alle Hilfslinien wegläßt, ein dem Würfel einbeschriebenes Dodekaeder (Fig. 18).

§. 9.

Der wichtigste Durchschnitt des Dodekaeders, Kugeln; die durch diesen Körper bestimmt sind.

In jedem Kantendurchschnitt des Würfels liegt ein Hauptdurchschnitt des Dodekaeders (Fig 27), und zwar in folgender Weise:

Es sey zz'z''z''' ein Kantendurchschnitt des Würfels, so liegen auf zwei parallelen Seiten desselben ganze Dodekaederkanten **GG'** und **EE'** mit ihren Mittelpunkten in der Seiten Mittelpunkt; die Mittelpunkte der andern beiden Seiten **m** und **m'** repräsentiren zugleich Mitten von zwei Dodekaederkanten. Zieht man also die Linien **mG**, **mE** und **m'G'**, **m'E'**, so hat man den Hauptdurchschnitt des Körpers.

Die Linien $mE = mG = m'G' = m'E'$ sind Höhenlinien der Grenzflächen; die aufeinander senkrechten und gleichen Geraden mm' und $m''m''$ sind Kantenaxen. Die Verbindungslinien der Kantenenden: GE' und EG' sind Eckaxen des Körpers.

Diese sämmtlichen Axen schneiden und halbiren sich im Punkt M, dem Mittelpunkt des Würfels.

Zieht man durch M noch Senkrechte:

JJ' auf die Parallelen: mG und $m'E'$

$J''J''$ „ „ „ mE und $m'G'$

so erhält man Flächenaxen des regulären Dodekaeders.

Durch das Dodekaeder sind drei Kugeln bestimmt:

1) Eine Kugel, deren Oberfläche durch sämmtliche Ecken geht, deren Mittelpunkt M und deren Halbmesser MG ist. In ihrer Oberfläche liegen die den Grenzflächen mit einem Halbmesser $= J'E$ umschriebenen Kreise.

2) Eine Kugel, deren Oberfläche die Kanten-Mittelpunkte berührt, deren Mittelpunkt M und deren Halbmesser $= mM$ ist. In ihrer Oberfläche liegen die den Grenzflächen mit einem Halbmesser $= J'm$ einbeschriebenen Kreise.

3) Eine Kugel, deren Oberfläche die Grenzflächen des Körpers berührt, deren Mittelpunkt M und deren Halbmesser $= MJ$ ist. In ihrer Oberfläche liegen die Mittelpunkte sämmtlicher Grenzflächen.

§. 10.

Bemerkungen.

1) Aufgabe: Aus der gegebenen Kante eines Körpers die Kante des Würfels zu finden, aus dem derselbe geschnitten werden kann.

a) Wenn die Kante des Tetraeders gegeben ist, beschreibt man ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Ikosaederkante ist; die Kathete ist dann die Würfelkante.

b) Wenn die Kante des Octaeders gegeben ist, so construirt man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten = der Octaederkante sind; die Hypotenuse ist die verlangte Würfelkante.

c) Wenn die Ikosaederkante gegeben ist, so verlängert man dieselbe nach dem äußern und mittlern Verhältniß in folgender Weise:

Im Endpunkt AB der Ikosaederkante errichtet man ein Loth $BC = \frac{1}{2} AB$, um C zieht man einen Kreis mit einem Halbmesser $= BC$, zieht AC bis H und macht dann $AD = AH$, so ist AD die gesuchte Würfelkante. (Fig. 29.)

d) Wenn die Dodekaederkante gegeben ist, so verlängert man dieselbe in der ebenbeschriebenen Weise und addirt dann zu der ganzen Linie, die man erhält, die gegebene Dodekaederkante, so ist die Summe = der gesuchten Würfelkante.

2) Die vier Dodekaeder des Würfelsystems.

Zum Schlusse sehe ich mich veranlaßt, darauf hinzuweisen, daß es vier Arten giebt, die zwölf Würfelkanten gleichmäßig abzustumpfen.

Zwei sind die, welche hier behandelt wurden, wo man die Würfelkante nach dem äußern und mittlern Verhältniß theilt, dann einmal das größere Stück nach §. 6, das andere Mal das kleinere Stück nach §. 8 auf den Würfelflächen aufträgt, und wo man nach den beschriebenen Weisen die Kanten wegschneidet. Man erhält so das Uebergangs- und das reguläre Dodekaeder.

Eine dritte Art ist die, wo man die halbe Würfelkante auf den Flächen aufträgt. Das weitere Verfahren ist übrigens ganz dasselbe, wie das oben beschriebene. Es entsteht ein dem Schwefelkiesdodekaeder sehr nahe kommender Körper.

Eine vierte Art ist die, wo man die Kanten bis zu den Mitten der Würfelflächen selbst abstumpft. Dadurch wird das Rautendodekaeder erzeugt.

Denken wir uns diese Körper ein und demselben Würfel einbeschrieben, so steht das Uebergangsdodekaeder unmittelbar im Würfel, hernach kommt

das Schwefelkiesdodekaeder,
das reguläre Dodekaeder,
das Rautendodekaeder,

sechs Kanten der drei ersten Körper und zwar bei den ersten beiden die größeren, ferner die sechs vierkantigen Ecken des Rautendodekaeders liegen in den Würfelflächen, und die Flächenaxen des Würfels haben sie gemeinschaftlich.

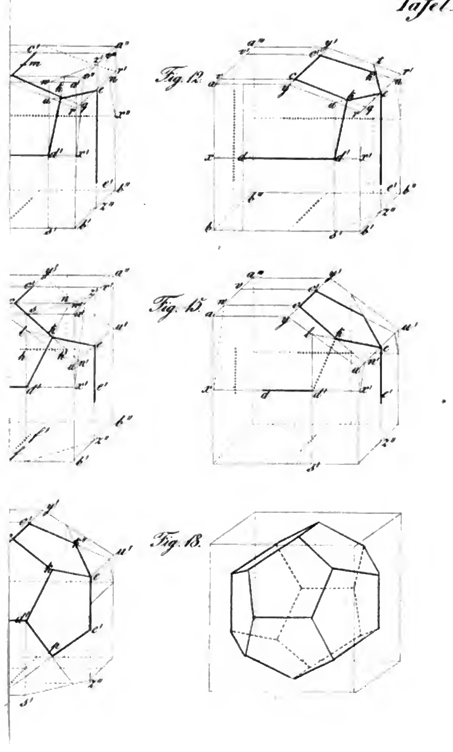
Tafel I.

Fig. 3.

Fig. 6.

Fig. 9.

Tafel II.



Tafel III.

